Correction du devoir n° 9 - 1ES

Ex1 : 1) $u_5 = 2$ $u_{10} = -18$ suite arithmétique de raison r

$u_{10} = u_5 + 5 \times r$

$-18 = 2 + 5r$

donc $5r = -20$

$\boxed{r = -4}$

$u_{22} = u_{10} + 12 \times r$

$= -18 - 48 = -66$

/3 1,5

2) $v_5 = 1$ $v_{10} = 32$ suite géométrique de raison q

$v_{10} = v_5 \times q^5$

$\iff 32 = 1 \times q^5$

$\iff \boxed{q = 2}$

$v_{12} = v_{10} \times q^2$

$= 32 \times 4 = 128$

1,5

Ex2 : 1) $u_n = 5n + 3$ $(n \in \mathbb{N})$

$u_n = f(n)$ avec $f(x) = 5x + 3$ définie sur $[0;+\infty[$

fonction affine de coefficient $5 > 0$

alors f croissante et (u_n) croissante

/4 1,5

2) $v_n = \dfrac{2n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

$v_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ définie sur $[0;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ $f'(x) > 0$

donc f croissante et (v_n) croissante

1,5

3) $\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{n+1} = w_n - n^2 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

$w_{n+1} - w_n = -n^2$

$-n^2 \leq 0$

donc $w_{n+1} \leq w_n$

(w_n) décroissante

0,5

Ex3 : 1) a) $\begin{cases} a_0 = 500 & (500 € \text{ placés}) \\ a_1 = 500 + 10 = 510 & \text{le mois suivant} \\ a_2 = 510 + 10 = 520 & 2 \text{ mois après} \end{cases}$

/6 0,75

b) $\boxed{a_{n+1} = a_n + 10}$ Tous les mois, on verse 10 €

(a_n) est une suite arithmétique de raison 10

de 1er terme $a_0 = 500$

0,75

c) $a_n = a_0 + n \times r$ donc $\boxed{a_n = 500 + 10n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 0,5

d) $a_7 = 500 + 10 \times 7 = 570$ 7 mois plus tard, le capital sera de 570 €

0,5

2) $\begin{cases} b_0 = 400 \quad (400\text{ € placés}) \\ b_1 = 400 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 400 \times 1{,}05 = 420 \\ b_2 = 420 \times 1{,}05 = 441 \end{cases}$ 0,75

ⓐ

ⓑ $\boxed{b_{n+1} = 1{,}05 \times b_n}$ Augmenter de 5% revient à multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$ 1

(b_n) est une suite géométrique de raison 1,05 de 1er terme $b_0 = 400$

ⓒ alors $b_n = b_0 \times q^n$ soit $\boxed{b_n = 400 \times 1{,}05^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 0,5

ⓓ $b_7 = 400 \times 1{,}05^7 \approx 562{,}84$ 0,5

Au bout de 7 mois, le capital sera de 562,84 € environ

3) $a_7 > b_7$ $\quad a_8 = 580$ et $b_8 \approx 590{,}98$

$a_8 < b_8$ 0,75

A partir de 8 mois le capital B devient supérieur au capital A.

Ex4 : 1) $\begin{cases} u_0 = 1500 \quad (\text{nombre d'employés au } 1/1/2012) \\ u_1 = 1500 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 100 = 1450 \quad \text{au } 1/1/2013 \\ u_2 = 1450 \times 0{,}9 + 100 = 1405 \quad \text{au } 1/1/2014 \end{cases}$

1 ⓐ

ⓑ
$u_1 - u_0 = -50$
$u_2 - u_1 = -45$ $\neq$ $\quad \frac{u_1}{u_0} \approx 0{,}967$ $\neq$ $\frac{u_2}{u_0} \approx 0{,}969$ donc (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

1,25

ⓒ $\boxed{u_{n+1} = \underbrace{0{,}9}_{\text{baisse de } 10\%}\, u_n + 100}$ → arrivée de 100 nouveaux jeunes par an 0,5

2) $\boxed{v_n = u_n - 1000}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $v_0 = 500$; $v_1 = 450$; $v_2 = 405$ 0,75

ⓑ $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 = (0{,}9\, u_n + 100) - 1000$

1 $= 0{,}9 u_n - 900 = 0{,}9\,(u_n - 1000) = 0{,}9 \times v_n$

0,5 Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 de terme initial $v_0 = 500$

0,5 ⓒ $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{500 \times (0{,}9)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

0,5 ⓓ $u_n = v_n + 1000 = \boxed{500 \times (0{,}9)^n + 1000}$

3) On cherche $u_n \leq 1500 - 300$ soit $\boxed{u_n \leq 1200}$ 1

$u_8 \approx 1215{,}2$ et $u_9 \approx 1193{,}7$ A partir de 2021, l'entreprise ne sera plus en sureffectif.