Correction du devoir n° 1 - 1 ESL

Ex 1 : $C(x) = x^2 + 50x + 100$ $\quad 5 \leq x \leq 40$

0,5 coût horaire en € pour la production de x appareils

1) ⓐ Chaque appareil est vendu 100 € — 1,5

0,5 donc $\boxed{R(x) = 100x}$ recette en €

alors $B(x) = R(x) - C(x) = 100x - (x^2 + 50x + 100)$

0,5 $= \boxed{-x^2 + 50x - 100}$ bénéfice en €

1 ⓑ $\boxed{B'(x)} = -2x + 50 = \boxed{2(-x + 25)}$

x	5		25		40
$B'(x)$		+	ϕ	−	
$B(x)$	125	$\nearrow$	525	$\searrow$	300

1

1

ⓒ Il faut produire et vendre 25 appareils pour que le bénéfice soit maximal — 0,5

2) $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ coût moyen en € d'un objet. $\quad 5 \leq x \leq 40$

0,5 ⓐ $C_M(x) = \dfrac{x^2 + 50x + 100}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{50x}{x} + \dfrac{100}{x} = \boxed{x + 50 + \dfrac{100}{x}}$

2 ⓑ $C'_M(x) = 1 + 0 + 100 \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{100}{x^2} = \boxed{\dfrac{x^2 - 100}{x^2}}$

ⓒ $x^2 > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de $(x^2 - 100)$

x	$-\infty$		-10		10		$+\infty$
$x^2 - 100$ ($a = 1$)		+ (signe de a)	ϕ	− (de $-a$)	ϕ	+ (signe de a)	

Donc

x	5		10		40
$C'_M(x)$		−	ϕ	+	
$C_M(x)$	75	$\searrow$	70	$\nearrow$	92,5

2

1

ⓓ Le coût moyen est minimal pour une production de 10 appareils.

0,5

3) Le bénéfice maximal ne se réalise pas en même temps que le coût moyen de production est minimal

0,5

Ex2 : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $\mathcal{D}f = [-4;4]$

1) $f = \frac{u}{v}$ $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

2,5 $f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

2) $(x^2+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x^2)$
$1-x^2 = (1+x)(1-x)$

2

x	-4		-1		1		4
$f'(x)$ ($a=-1$)		signe de $-a$ $-$	0	signe de a $+$	0	signe de $-a$ $-$	
$f(x)$	$-\frac{4}{17}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{4}{17}$

1,5

$f(4) = \frac{4}{17}$

18,5

3) (T) : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$
$f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$
$y = 1 \times x + 0$
$\boxed{y = x}$

1

4)

0,5 × 3 + 0,5