Correction du devoir n° 5 - 1-ES

Ex 1 : 1) $2x^2 - x - 10 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$

$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-10) = 81 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

2 racines $x_1 = \dfrac{1+9}{4} = \dfrac{5}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-9}{4} = -2$

x	$-\infty$		-2		$5/2$		$+\infty$
$2x^2 - x - 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a = 2$, $a > 0$		signe de a		signe de $-a$		signe de a	

$$S = \left]-\infty ; -2\right] \cup \left[5/2 ; +\infty\right[$$

2) $4x^2 + 5x < x - 16$ sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 16 < 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 0 \qquad \Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 \qquad \Delta < 0$

donc $(x^2 + x + 1)$ est du signe de $a = 1$ soit

$x^2 + x + 1 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$

donc l'inéquation $x^2 + x + 1 < 0$ n'a pas de solution

3) $\dfrac{2x^2 - 3x - 14}{x - 2} \leqslant 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ car $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$N(x) = 2x^2 - 3x - 14$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-14) = 9 + 112 = 121$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11 \quad$ 2 racines $x_1 = \dfrac{3 + 11}{4} = \dfrac{7}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 - 11}{4} = -2$

x	$-\infty$		-2		2		$7/2$		$+\infty$
$a=2$ $N(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x - 2$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$\dfrac{N(x)}{x-2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

du signe de a à l'extérieur

$$S = \left]-\infty ; -2\right] \cup \left]2 ; 7/2\right]$$

Ex 2 : $\mathcal{C}_f \to f(x) = 2x^2 - 3x - 5 \qquad \mathcal{D} : y = -x + 7$

1) Il s'agit de résoudre $2x^2 - 3x - 5 = -x + 7$ sur $\mathbb{R}$

soit $2x^2 - 2x - 12 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4 \times (-6) = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

deux racines $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 = -x_1 + 7 = -3 + 7 = 4 \\ y_2 = -x_2 + 7 = -(-2) + 7 = 9 \end{cases}$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ se coupent en 2 points

$A_1(3 ; 4)$ et $A_2(-2 ; 9)$

2) Il s'agit d'étudier le signe de :

$(2x^2-3x-5)-(-x+7) = 2x^2-2x-12$

$= 2(x^2-x-6)$ $\quad 2>0$

du signe de x^2-x-6

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a=1$		du signe de a		du signe de $-a$		du signe de a	

- Pour $x<-2$ $f(x)-(-x+7)>0$ donc $f(x)>-x+7$
  $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$
- pour $-2\leq x\leq 3$ $f(x)\leq -x+7$ donc
  $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{D}$
- pour $x>3$ $f(x)>-x+7$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.

Ex3 $C(q)=0{,}1q^2+10q+1500$ $\quad q\in[0;500]$
en €

1) $C(0)=1500$ les coûts fixes sont de 1500 €

$C(q)=$ $\iff 0{,}1q^2+10q+1500=3500$

$\iff 0{,}1q^2+10q-2000=0$

$\Delta = 100-4\times 0{,}1\times(-2000) = 900$ $\quad \sqrt{\Delta}=30$

deux racines $\begin{cases} q_1 = \dfrac{-10-30}{2\times 0{,}1} <0 \text{ ne convient pas} \\ q_2 = \dfrac{-10+30}{2\times 0{,}1} = \dfrac{20}{0{,}2} = 100 \end{cases}$

La fabrication de 100 objets coûte 3500 € en production

2) $R(q)=87q$ puisque un objet est vendu 87 €

$B(q)=R(q)-C(q)= 87q-(0{,}1q^2+10q+1500)$

$= 87q-0{,}1q^2-10q-1500$

$= -0{,}1q^2+77q-1500$

$\dfrac{-77}{2\times(-0{,}1)} = 385$

$a=-0{,}1$ donc $a<0$

q	0		385		500
$B(q)$	-1500	$\nearrow$	13322	$\searrow$	12000

Le bénéfice maximal sera de 13322 € pour 385 objets produits et vendus