Correction du devoir n°10 - 1L

Ex 1 : 1) ⓐ $\begin{cases} u_n = \dfrac{n+1}{3} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)+1}{3} = \dfrac{n+2}{3} \end{cases}$ $u_0 = \dfrac{1}{3}$; $u_1 = \dfrac{2}{3}$; $u_2 = \dfrac{3}{3} = 1$

1/4,5

donc $\boxed{u_{n+1} - u_n} = \dfrac{n+2}{3} - \dfrac{n+1}{3} = \dfrac{1}{3}$

1,5 Alors (u_n) est une suite arithmétique de raison $1/3$ de terme initial $u_0 = 1/3$

ⓑ $\begin{cases} v_n = -\dfrac{n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ v_{n+1} = -\dfrac{(n+1)}{2} \end{cases}$ $v_0 = 0$; $v_1 = -\dfrac{1}{2}$; $v_2 = -1$

donc $\boxed{v_{n+1} - v_n} = \dfrac{-(n+1)}{2} - \dfrac{(-n)}{2} = -\dfrac{1}{2}$

1,1 Alors (v_n) suite arithmétique de raison $-1/2$ de terme initial $v_0 = 0$

2) $w_{10} = 2$
$w_{20} = 7$

$w_{20} = w_{10} + 10 \times r$
$\Leftrightarrow 7 = 2 + 10r$
$\Leftrightarrow 5 = 10r$
$\Leftrightarrow r = \dfrac{1}{2}$

1,3

$w_{10} = w_5 + 5r$
$\Leftrightarrow 2 = w_5 + \dfrac{5}{2}$
$\Leftrightarrow w_5 = 2 - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{2}$

(w_n) suite arithmétique de raison $1/2$.

Ex 2 : 1) ⓐ $\begin{cases} u_n = -3 \times 2^n \quad (n \in \mathbb{N}) \\ u_{n+1} = -3 \times 2^{n+1} = -3 \times 2^n \times 2 = -6 \times 2^n \end{cases}$ $u_0 = -3$; $u_1 = -6$; $u_2 = -12$

1/4

1,5 donc $\boxed{u_{n+1} = -6 \times u_n}$

Alors (u_n) est une suite géométrique de raison -6 de terme initial $u_0 = -3$

ⓑ $v_n = 3n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ $v_0 = 1$; $v_1 = 4$; $v_2 = 7$

$\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{4}{1} = 4$ $\quad \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{7}{4}$ $\quad 4 \neq 7/4$

1,5 donc (v_n) n'est pas géométrique.

2) $\begin{cases} w_2 = 37{,}5 \\ w_5 = 300 \end{cases}$

1,5

$w_5 = w_2 \times q^3$

$\Leftrightarrow 300 = 37{,}5 \times q^3$

$\Leftrightarrow \frac{300}{37{,}5} = q^3$

$\Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$

$w_{11} = w_5 \times q^6$

$= 300 \times 2^6$

$= \boxed{19200}$

(w_n) suite géométrique de raison 2

Ex3 1) $u_n = n^2 + 4n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 4x$
$(n \in \mathbb{N})$ $\quad x \in [0\,;+\infty[$

1,5

$f'(x) = 2x + 4$ $\quad f'(x) > 0$ donc f croissante

avec (u_n) est une suite croissante.

2) $v_n = -\frac{3}{2}n + \frac{1}{4} = f(n)$ avec $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ sur $[0\,;+\infty[$
$(n \in \mathbb{N})$

1,5

fonction affine de coefficient
$a = -3/2$ (< 0)
Donc f décroissante

Alors (v_n) est décroissante

3) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\quad u_{n+1} - u_n = (u_n - n^2) - u_n$
$= -n^2$

$-n^2 \leq 0$

1 donc $u_{n+1} \leq u_n$ $\quad (u_n)$ est décroissante

B1

Ex 4 : 1) a) $\begin{cases} u_0 = 1100 \ (€) & \text{au 1er janvier 2010 pour Victor} \\ u_1 = u_0 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1100 \times 1{,}02 = 1122 & (2011) \\ u_2 = u_1 \times 1{,}02 = 1144{,}44 & (2012) \end{cases}$ 1

b) augmenter de 2% revient à multiplier par $1 + \frac{2}{100}$ soit 1,02 : $\boxed{u_{n+1} = 1{,}02\, u_n}$ 0,5

(u_n) est une suite géométrique de raison 1,02 de 1er terme $u_0 = 1100$ 0,5

c) $u_n = u_0 \times q^n = \boxed{1100 \times (1{,}02)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 0,5

d) $u_5 = 1100 \times (1{,}02)^5 \simeq 1214{,}49$ En 2015, le salaire de Victor sera de 1214,49 € environ par mois 0,5

2) a) $\begin{cases} v_0 = 1200 \ (€) & \text{au 1er janvier 2010 pour Sandra} \\ v_1 = v_0 + 50 = 1250 & (2011) \\ v_2 = v_1 + 50 = 1300 & (2012) \end{cases}$ 0,5

b) $\boxed{v_{n+1} = v_n + 50}$ 50 € de plus par an 0,5

(v_n) est une suite arithmétique de raison 50 de terme initial $v_0 = 1200$ 0,5

c) $v_n = v_0 + n \times r = \boxed{1200 + 50n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 0,5

d) $v_5 = 1200 + 50 \times 5 = 1450$ En 2015, le salaire mensuel de Sandra sera de 1450 € 0,5

3) $u_n \geqslant v_n$

$\Leftrightarrow 1100 \times (1{,}02)^n \geqslant 1200 + 50n$

$\begin{cases} u_{76} \simeq 4954{,}5 & \text{et } v_{76} = 5000 \\ u_{77} \simeq 5053{,}6 & \text{et } v_{77} = 5050 \end{cases}$ 1

Le salaire de Victor dépassera celui de Sandra à partir de 2087 !

Ex5 : $\begin{cases} u_0 = 900 \\ u_{n+1} = 0{,}6\, u_n + 200 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) $\begin{cases} u_1 = 0{,}6\, u_0 + 200 = 740 \\ u_2 = 0{,}6\, u_1 + 200 = 644 \end{cases}$ 0,5

1/4

2) $v_n = u_n - 500$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = (0{,}6\, u_n + 200) - 500$
$= 0{,}6\, u_n - 300$ 0,75

ⓑ $v_{n+1} = 0{,}6\,(u_n - 500) = \boxed{0{,}6 \times v_n}$ 0,75

donc (v_n) est une suite géométrique 0,5
de raison 0,6 de terme initial $v_0 = 400$

ⓒ $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{400 \times (0{,}6)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ 0,5

ⓓ $u_n = v_n + 500 = \boxed{400 \times (0{,}6)^n + 500}$ 0,5

3) D'après la calculatrice u_n se rapproche
de 500 quand n devient de plus
en plus grand. 0,5
On dit que (u_n) converge vers 500